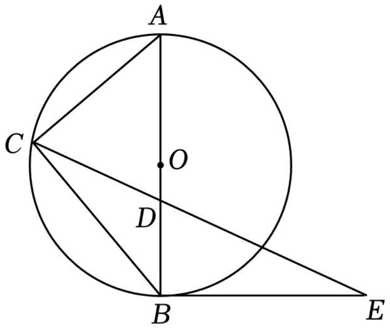
十年之圆的证明（SY）

1．（2023•SY）如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 是⊙O 上的一点（点 C 不与点 A，B 重合），连接 AC、BC，点 D 是 AB 上的一点，$AC=AD$，BE 交 CD 的延长线于点 E，且 $BE=BC$.

（1）求证：BE 是⊙O 的切线；

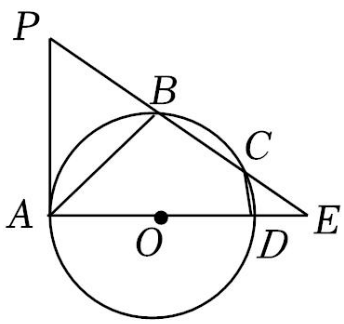
（2）若⊙O 的半径为 5，$\tan E=\frac{1}{2}$，则 BE 的长为 ______.



2．（2022•SY）如图，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，AD 是⊙O 的直径，AD，BC 的延长线交于点 E，延长 CB 交 PA 于点 P，$\angle BAP+\angle DCE=90°$．

（1）求证：PA 是⊙O 的切线；

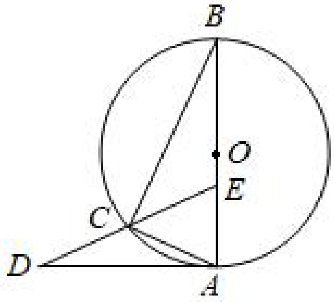
（2）连接 AC，$\sin\angle BAC=\frac{1}{3}$，$BC=2$，$AD$ 的长为 ______.



3．（2021•SY）如图，AB是⊙O的直径，AD与⊙O交于点A，点E是半径OA上一点（点E不与点O，A重合）．连接DE交⊙O于点C，连接CA，CB．若$CA=CD$，$\angle ABC=\angle D$．

（1）求证：AD是⊙O的切线；

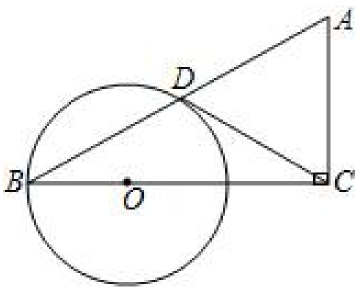
（2）若$AB=13$，$CA=CD=5$，则AD的长是 ______________________．



4．（2020•SY）如图，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，点O为BC边上一点，以点O为圆心，OB长为半径的圆与边AB相交于点D，连接DC，当DC为⊙O的切线时．

（1）求证：$DC=AC$；

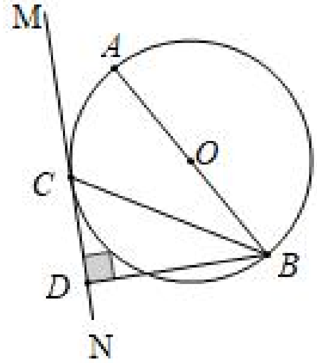
（2）若$DC=DB$，⊙O的半径为1，请直接写出DC的长为_________________．



5．（2019•SY）如图，AB 是⊙O 的直径，BC 是⊙O 的弦，直线 MN 与⊙O 相切于点 C，过点 B 作 $BD \perp MN$ 于点 D．

（1）求证：$\angle ABC = \angle CBD$；

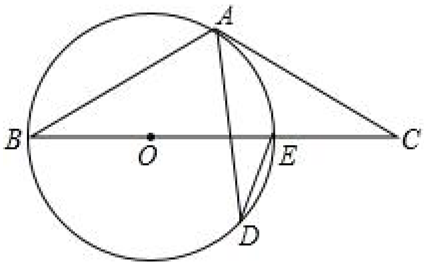
（2）若 $BC = 4\sqrt{5}$，$CD = 4$，则⊙O 的半径是_______．



6．（2018•SY）如图，BE 是⊙O 的直径，点 A 和点 D 是⊙O 上的两点，过点 A 作⊙O 的切线交 BE 延长线于点 C．

（1）若 $\angle ADE = 25^\circ$，求 $\angle C$ 的度数；

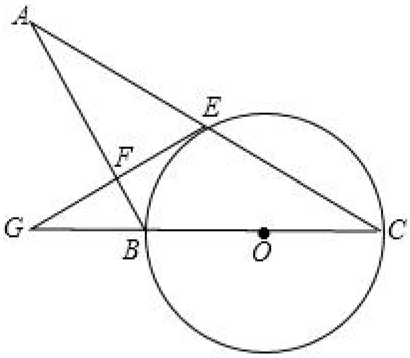
（2）若 $AB = AC$，$CE = 2$，求⊙O 半径的长．



7．（2017•SY）如图，在△*ABC* 中，以 *BC* 为直径的⊙*O* 交 *AC* 于点 *E*，过点 *E* 作 *EF*⊥*AB* 于点 *F*，延长 *EF* 交 *CB* 的延长线于点 *G*，且∠*ABG*＝2∠*C*.

（1）求证：*EF* 是⊙*O* 的切线；

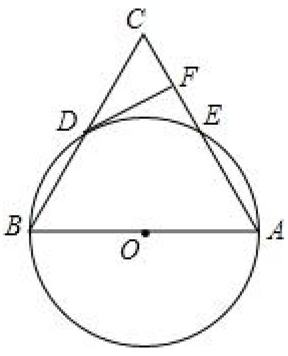
（2）若 sin∠*EGC*＝$\frac{3}{5}$，⊙*O* 的半径是 3，求 *AF* 的长.



8．（2016•SY）如图，在△*ABC* 中，以 *AB* 为直径的⊙*O* 分别与 *BC*，*AC* 相交于点 *D*，*E*，*BD*＝*CD*，过点 *D* 作⊙*O* 的切线交边 *AC* 于点 *F*.

（1）求证：*DF*⊥*AC*；

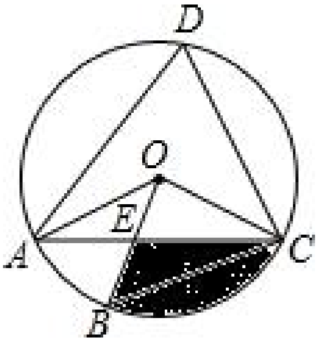
（2）若⊙*O* 的半径为 5，∠*CDF*＝30°，求$\overset{\frown}{BD}$的长（结果保留π）.



9．（2015•SY）如图，四边形$ABCD$是⊙O的内接四边形，$\angle ABC=2\angle D$，连接OA、OB、OC、AC，OB与AC相交于点E．

（1）求$\angle OCA$的度数；

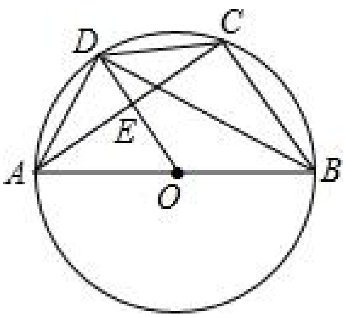
（2）若$\angle COB=3\angle AOB$，$OC=2\sqrt{3}$，求图中阴影部分面积（结果保留π和根号）



10．（2014•SY）如图，⊙O是△ABC的外接圆，AB为直径，OD∥BC交⊙O于点D，交AC于点E，连接AD，BD，CD．

（1）求证：$AD=CD$；

（2）若$AB=10$，$\cos\angle ABC=\frac{3}{5}$，求$\tan\angle DBC$的值．



参考答案与试题解析

1．（1）证明：∵AB 是⊙O 的直径，

∴$\angle ACB=90°$，

∴$\angle ACD+\angle BCD=90°$，

∵$AC=AD$，

∴$\angle ACD=\angle ADC$，

∵ $\angle ADC=\angle BDE$，

∴$\angle ACD=\angle BDE$，

∵$BE=BC$，

∴$\angle BCD=\angle E$，

∴$\angle BDE+\angle E=90°$，

∴$\angle DBE=180°-(\angle BDE+\angle E)=90°$，

即 $OB\perp BE$.

∵OB 为⊙O 的半径，

∴BE 是⊙O 的切线；

（2）解：∵$\tan E=\frac{1}{2}$，$\tan E=\frac{DB}{BE}$,

∴$\frac{DB}{BE}=\frac{1}{2}$,

设 $DB=x$，则 $BE=2x$，

∴$BC=BE=2x$，$AD=AB-BD=10-x$，

∵$AC=AD$，

∴$AC=10-x$，

∵ $\angle ACB=90°$，

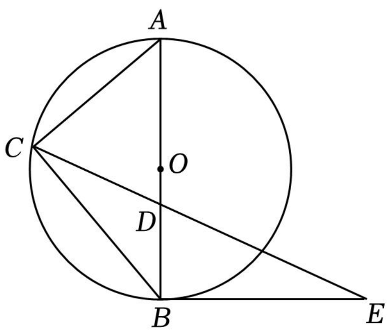
∴$AC^2+BC^2=AB^2$,

∴$(10-x)^2+(2x)^2=10^2$,

解得：$x=0$（不合题意，舍去）或 $x=4$.

∴$BE=2x=8$.

故答案为：8.



2．（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，

∴$\angle BAD+\angle BCD=180°$，

∵$\angle BCD+\angle DCE=180°$，

∴$\angle BAD=\angle DCE$，

∵$\angle BAP+\angle DCE=90°$，

∴$\angle BAP+\angle BAD=90°$，

∴$\angle OAP=90°$，

∵OA 是⊙O 的半径，

∴PA 是圆 O 的切线；

（2）连接 BO 并延长交⊙O 于点 F，连接 CF，

∵BF 是⊙O 的直径，

∴$\angle BCF=90°$，

∵$\angle BAC=\angle F$，

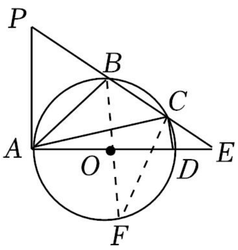
∴$\sin\angle BAC=\sin F=\frac{1}{3}$，

在 Rt△BCF 中，$BC=2$，

∴$BF=\frac{BC}{\sin F}=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$，

∴$AD=BF=6$，

故答案为：6．



3．（1）∵AB 是⊙O 的直径，

∴$\angle ACB=90^\circ$，

∴$\angle BAC+\angle ABC=90^\circ$．

又∵$CA=CD$，

∴$\angle D=\angle CAD$，

又∵$\angle ABC=\angle D$，

∴$\angle CAD+\angle BAC=90^\circ$，

即 $OA\perp AD$，

∴AD 是⊙O 的切线；

（2）由（1）可得$\angle ABC+\angle BAC=90^\circ=\angle D+\angle DEA$，

∵$\angle ABC=\angle D$，

∴$\angle BAC=\angle DEA$，

∴$CE=CA=CD=5$，

∴$DE=10$，

在 Rt△ABC 中，由勾股定理得，

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$，

∵$\angle ACB=\angle DAE=90^\circ$，$\angle ABC=\angle D$，

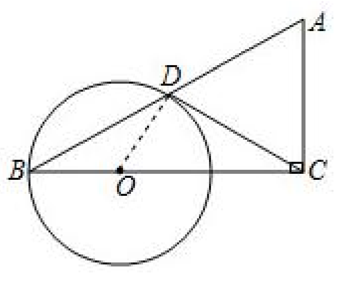
∴$\triangle ABC\backsim\triangle EDA$，

∴$\frac{AB}{ED}=\frac{BC}{AD}$，

即$\frac{13}{10}=\frac{12}{AD}$，

解得，$AD=\frac{120}{13}$．

4．证明：（1）如图，连接 OD，



∵CD 是⊙O 的切线，

∴$CD\perp OD$，

∴$\angle ODC=90°$，

∴$\angle BDO+\angle ADC=90°$，

∵$\angle ACB=90°$，

∴$\angle A+\angle B=90°$，

∵$OB=OD$，

∴$\angle OBD=\angle ODB$，

∴$\angle A=\angle ADC$，

∴$CD=AC$；

（2）∵$DC=DB$，

∴$\angle DCB=\angle DBC$，

∴$\angle DCB=\angle DBC=\angle BDO$，

∵$\angle DCB+\angle DBC+\angle BDO+\angle ODC=180°$，

∴$\angle DCB=\angle DBC=\angle BDO=30°$，

∴$DC=\sqrt{3}OD=\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{3}$．

5．（1）证明：连接OC，

∵MN为⊙O的切线，

∴$OC\perp MN$，

∵$BD\perp MN$，

∴$OC\parallel BD$，

∴$\angle CBD=\angle BCO$．

又∵$OC=OB$，

∴$\angle BCO=\angle ABC$，

∴$\angle CBD=\angle ABC$.；

（2）解：连接AC，

在Rt△BCD中，$BC=4\sqrt{5}$，$CD=4$，

∴$BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=8$，

∵AB是⊙O的直径，

∴$\angle ACB=90°$，

∴∠ACB＝∠CDB＝90°，

∵∠ABC＝∠CBD，

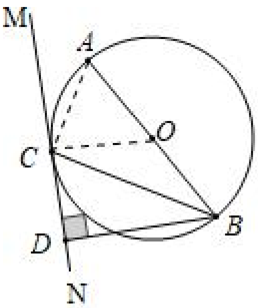
∴△ABC∽△CBD，

∴$\frac{AB}{BC}=\frac{CB}{BD}$，即$\frac{AB}{4\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{8}$，

∴AB＝10，

∴⊙O 的半径是 5，

故答案为 5．



6．

解：（1）连接 OA，

∵AC 是⊙O 的切线，OA 是⊙O 的半径，

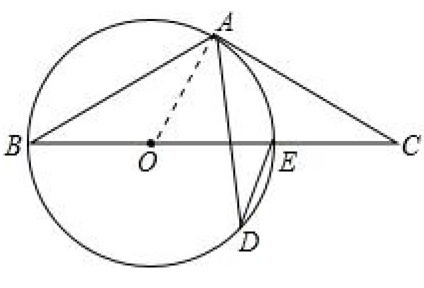
∴OA⊥AC，

∴∠OAC＝90°，

∵$\widehat{AE}=\widehat{AE}$，∠$ADE$＝25°，

∴∠AOE＝2∠ADE＝50°，

∴∠C＝90°－∠AOE＝90°－50°＝40°；



（2）∵AB＝AC，

∴∠B＝∠C，

∵$\widehat{AE}=\widehat{AE}$，

∴∠AOC＝2∠B，

∴$\angle AOC=2\angle C$，

∵$\angle OAC=90°$，

∴$\angle AOC+\angle C=90°$，

∴$3\angle C=90°$，

∴$\angle C=30°$，

∴$OA=\frac{1}{2}OC$，

设⊙O的半径为r，

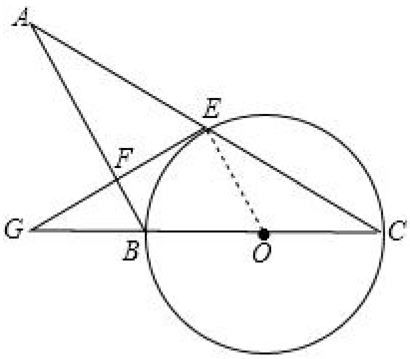
∵$CE=2$，

∴$r=\frac{1}{2}(r+2)$，

解得：$r=2$，

∴⊙O的半径为2．

7．解：（1）如图，连接EO，则$OE=OC$，



∴$\angle EOG=2\angle C$，

∵$\angle ABG=2\angle C$，

∴$\angle EOG=\angle ABG$，

∴$AB\parallel EO$，

∵$EF\perp AB$，

∴$EF\perp OE$，

又∵OE是⊙O的半径，

∴EF是⊙O的切线；

（2）∵$\angle ABG=2\angle C$，$\angle ABG=\angle C+\angle A$，

∴$\angle A=\angle C$，

∴$BA=BC=6$，

在 Rt△OEG 中，∵$\sin\angle EGO=\frac{OE}{OG}$，

∴$OG=\frac{OE}{\sin\angle EGO}=\frac{3}{\frac{3}{5}}=5$，

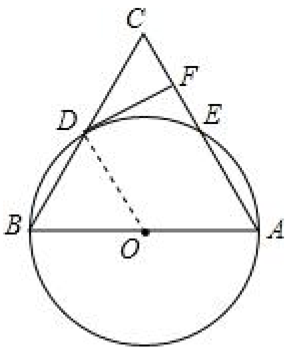
∴$BG=OG-OB=2$，

在 Rt△FGB 中，∵$\sin\angle EGO=\frac{BF}{BG}$，

∴$BF=BG\sin\angle EGO=2\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$，

则 $AF=AB-BF=6-\frac{6}{5}=\frac{24}{5}$.

8.（1）证明：连接 OD，如图所示.



∵DF 是⊙O 的切线，D 为切点，

∴$OD\perp DF$，

∴$\angle ODF=90°$.

∵$BD=CD$，$OA=OB$，

∴OD 是△ABC 的中位线，

∴$OD\parallel AC$，

∴$\angle CFD=\angle ODF=90°$，

∴$DF\perp AC$.

（2）解：∵$\angle CDF=30°$，

由（1）得$\angle ODF=90°$，

∴$\angle ODB=180°-\angle CDF-\angle ODF=60°$.

∵$OB=OD$，

∴△OBD 是等边三角形，

∴$\angle BOD=60°$，

$\therefore \overset{\frown}{BD}$的长$=\frac{n\pi R}{180}=\frac{60\pi\times5}{180}=\frac{5}{3}\pi$.

9．解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，

$\therefore \angle ABC+\angle D=180°$，

$\because \angle ABC=2\angle D$，

$\therefore \angle D+2\angle D=180°$，

$\therefore \angle D=60°$，

$\therefore \angle AOC=2\angle D=120°$，

$\because OA=OC$，

$\therefore \angle OAC=\angle OCA=30°$；

（2）$\because \angle COB=3\angle AOB$，

$\therefore \angle AOC=\angle AOB+3\angle AOB=120°$，

$\therefore \angle AOB=30°$，

$\therefore \angle COB=\angle AOC-\angle AOB=90°$，

在 Rt△OCE 中，$OC=2\sqrt{3}$，

$\therefore OE=OC\cdot\tan\angle OCE=2\sqrt{3}\cdot\tan30°=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2$，

$\therefore S_{\triangle OEC}=\frac{1}{2}OE\cdot OC=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{扇形OBC}=\frac{90\pi\times(2\sqrt{3})^2}{360}=3\pi$，

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形OBC}-S_{\triangle OEC}=3\pi-2\sqrt{3}$.

10．（1）证明：∵AB 为⊙O 的直径，

$\therefore \angle ACB=90°$，

$\because OD\parallel BC$，

$\therefore \angle AEO=\angle ACB=90°$，

$\therefore OD\perp AC$，

$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore AD=CD$；

（2）解：$\because AB=10$，

$\therefore OA=OD=\frac{1}{2}AB=5$，

$\because OD\parallel BC$，

∴$\angle AOE=\angle ABC$，

在 Rt$\triangle AEO$ 中，

$OE=OA\cdot\cos\angle AOE=OA\cdot\cos\angle ABC=5\times\frac{3}{5}=3$，

∴$DE=OD-OE=5-3=2$，

∴$AE=\sqrt{AO^2-OE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

在 Rt$\triangle AED$ 中，

$\tan\angle DAE=\frac{DE}{AE}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,

∵$\angle DBC=\angle DAE$，

∴$\tan\angle DBC=\frac{1}{2}$.